Sopstveni vektori i sopstvene vrijednosti

U nastavku lekcije imaćemo dvije definicije:

(a) definiciju sopstvenog vektora i sopstvene vrijednosti za linearni operator T

(b) definiciju sopstvenog vektora i sopstvene vrijednosti za $n \times n$ matricu A.

U literaturi sopstveni vektor ima sljedeće nazive: karakteristični vektor, svojstveni vektor, eigenvector. Slično je i za svojstvenu vrijednost.

Definicija Posmatrajmo $n \times n$ matricu A. Nenula vektor $\vec{v}$ u $\mathbb{R}^n$ zovemo svojstveni vektor od A ako je

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

za neki skalar λ. Primjetite da ovaj skalar λ može biti nula (0). Skalar λ zovemo svojstvena vrijednost pridružena svojstvenom vektoru $\vec{v}$.

Definicija Neka je $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linearni operator. Nenula vektor $\vec{v}$ u $\mathbb{R}^n$ zovemo svojstveni vektor od T ako

$$T(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$$

za neki skalar λ. Primjetite da skalar λ može biti nula. Skalar λ zovemo svojstvena vrijednost koja odgovara svojstvenom vektoru $\vec{v}$.

\# Naći sve karakteristične vektore i karakteristične vrijednosti jedinične matrice $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Rj. Prema definiciji, tražimo vektor $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ takav da

$$I \cdot \vec{v} = \lambda\vec{v} \quad \text{za neki skalar } \lambda \in \mathbb{R}, \ \vec{v} \neq \vec{0}.$$

$$I \cdot \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \qquad \lambda \cdot \vec{v} = \lambda \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \\ \lambda v_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \\ \lambda v_3 \end{bmatrix} \quad \text{tj.} \quad \begin{aligned} v_1 &= \lambda v_1 \\ v_2 &= \lambda v_2 \\ v_3 &= \lambda v_3 \end{aligned}$$

Karakteristični vektori su svi nenula vektori iz $\mathbb{R}^3$ i njima odgovara karakteristična vrijednost $\lambda = 1$.

\# Naći svojstvene vrijednosti matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$.

Rj. Prema definiciji $A \cdot \vec{v} = \lambda\vec{v}$, $\vec{v} \neq 0$.

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} A\vec{v} &= \lambda\vec{v} \\ A\vec{v} - \lambda\vec{v} &= \vec{0} \\ (A - \lambda I)\vec{v} &= \vec{0} \end{aligned} \quad \text{gdje je } I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ovo je homogeni sistem linearnih jednačina i on će imati netrivijalna rješenja akko $\det(A - \lambda I) = 0$.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda) - 8 = 3 - \lambda - 3\lambda + \lambda^2 - 8 = \lambda^2 - 4\lambda - 5$$

$$= (\lambda - 5)(\lambda + 1) = 0$$

Matrica A ima dvije svojstvene vrijednosti $\lambda_1 = 5$ i $\lambda_2 = -1$.

\# Naći svojstvene vrijednosti matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

Rj. Prema definiciji $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$, $\vec{v} \neq 0$,

$\vec{v} \in \mathbb{R}^5$ tj. $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix}$, $v_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,5}$

$$A\vec{v} - \lambda\vec{v} = \vec{0}$$

$$(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$$

Ovo je homogeni sistem linearnih jednačina i on ima netrivijalno rješenje akko je $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2-\lambda & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3-\lambda & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4-\lambda & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)(4-\lambda)(5-\lambda) = 0$$

Svojstvene vrijednosti su 1, 2, 3, 4 i 5.

Nađi svojstvene vrijednosti i svojstveni vektore matrice $A=\begin{bmatrix}0&5&8\\5&0&8\\8&5&0\end{bmatrix}$.

Rj. Prema definiciji $A\vec{v}=\lambda\vec{v}$, $\vec{v}\neq 0$

$$A\vec{v}-\lambda\vec{v}=\vec{0}$$

$$(A-\lambda I)\vec{v}=\vec{0} \quad \text{gdje je} \quad I=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

Homogeni sistem ima netrivijalna rješenja akko je $\det(A-\lambda I)=0$.

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}-\lambda&5&8\\5&-\lambda&8\\8&5&-\lambda\end{vmatrix} \overset{I_v+(II_v+III_v)}{=\!=\!=} \begin{vmatrix}13-\lambda&5&8\\13-\lambda&-\lambda&8\\13-\lambda&5&-\lambda\end{vmatrix}=(13-\lambda)\begin{vmatrix}1&5&8\\1&-\lambda&8\\1&5&-\lambda\end{vmatrix}$$

$$\overset{I_v-III_v}{=\!=\!=}(13-\lambda)\begin{vmatrix}0&0&\lambda+8\\1&-\lambda&8\\1&5&-\lambda\end{vmatrix}=(13-\lambda)(\lambda+8)\begin{vmatrix}1&-\lambda\\1&5\end{vmatrix}=(13-\lambda)(\lambda+8)(\lambda+5)$$

Svojstvene vrijednosti su $\lambda_1=-5$, $\lambda_2=-8$ i $\lambda_3=13$.

Za $\lambda=-5$ imamo:

$$(A-\lambda I)\vec{v}=\vec{0} \qquad \vec{v}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}5&5&8\\5&5&8\\8&5&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

tj.
$$\begin{aligned}5x_1+5x_2+8x_3&=0 \quad (I)\\5x_1+5x_2+8x_3&=0 \quad (II)\\8x_1+5x_2+5x_3&=0 \quad (III)\end{aligned}$$

$(I)\equiv(II)$

$(II)-(III)$: $-3x_1+3x_2=0$

$x_1=x_2=t\in\mathbb{R}$ $\qquad 8t+5x_2+5t=0$ $\qquad x_2=-\frac{13}{5}t$ $\qquad$ t proizvoljan realan broj $\neq 0$

Svojstveni vektori $\vec{v}_1=\begin{bmatrix}t\\-\frac{13}{5}t\\t\end{bmatrix}$ $(t\neq 0)$ koji odgovaraju svojstvenoj vrijednosti $\lambda_1=-5$.

Za $\lambda=-8$ imamo

$$(A-\lambda I)\vec{v}=\vec{0} \qquad \begin{bmatrix}8&5&8\\5&8&8\\8&5&8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

tj.
$$\begin{aligned}8x_1+5x_2+8x_3&=0 \quad (1)\\5x_1+8x_2+8x_3&=0 \quad (2)\\8x_1+5x_2+8x_3&=0 \quad (3)\end{aligned}$$

$x_1=x_2=t$ $\qquad x_3=-\frac{13}{8}t$

Svojstveni vektori $\vec{v}_2=\begin{bmatrix}t\\t\\-\frac{13}{8}t\end{bmatrix}$, $(t\neq 0)$ koji odgovaraju svojstvenoj vrijednosti $\lambda_2=-8$.

Za $\lambda=13$ imamo

$$\begin{bmatrix}-13&5&8\\5&-13&8\\8&5&-13\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}.$$

tj.
$$\begin{aligned}-13x_1+5x_2+8x_3&=0\\5x_1-13x_2+8x_3&=0\\8x_1+5x_2-13x_3&=0\end{aligned}$$

$x_1=x_2=t$, $x_3=t$

$\vec{v}_3=\begin{bmatrix}t\\t\\t\end{bmatrix}$, $t\neq 0$ za $\lambda_3=13$

Nađi svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore matrice $B=\begin{bmatrix}1&-2&-1\\-1&1&1\\1&0&-1\end{bmatrix}$.

Rj. Prema definiciji $B\vec{v}=\lambda\vec{v}$, $\vec{v}\neq 0$.

$$B\vec{v}-\lambda\vec{v}=\vec{0}$$

$(B-\lambda I)\vec{v}=\vec{0}$ $\quad$ Ovaj sistem ima netrivijalna rješenja ako i samo ako je $\det(B-\lambda I)=0$.

$$\det(B-\lambda I)=\begin{vmatrix}1-\lambda&-2&-1\\-1&1-\lambda&1\\1&0&-1-\lambda\end{vmatrix}\overset{I_k+III_k}{=\!=\!=}\begin{vmatrix}-\lambda&-2&-1\\0&1-\lambda&1\\-\lambda&0&-1-\lambda\end{vmatrix}=(-\lambda)\begin{vmatrix}1&-2&-1\\0&1-\lambda&1\\1&0&-1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$\overset{III_v-I_v}{=\!=\!=}(-\lambda)\begin{vmatrix}1&-2&-1\\0&1-\lambda&1\\0&2&-\lambda\end{vmatrix}=(-\lambda)\begin{vmatrix}1-\lambda&1\\2&-\lambda\end{vmatrix}=(-\lambda)(\lambda^2-\lambda-2)=-\lambda(\lambda+1)(\lambda-2)$$

Svojstvene vrijednosti su $\lambda_1=0$, $\lambda_2=-1$ i $\lambda_3=2$.

$\vec{v}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$ svojstveni vektor.

$$(A-\lambda I)\cdot\vec{v}=\vec{0}$$

Za $\lambda_1=0$: $\begin{bmatrix}1&-2&-1\\-1&1&1\\1&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$ tj.
$$\begin{aligned}x_1-2x_2-x_3&=0\\-x_1+x_2+x_3&=0\\x_1-x_3&=0\end{aligned}$$

$x_1=x_3=t$, $t\in\mathbb{R}$, $x_2=0$ $\qquad \vec{v}_1=\begin{bmatrix}t\\0\\t\end{bmatrix}$, $t\neq 0$ svojstveni vektor koji odgovara svojstvenoj vrijednosti $\lambda_1=0$.

Za $\lambda_2=-1$: $(A-\lambda I)\vec{v}=\vec{0}$ $\quad \begin{bmatrix}2&-2&1\\-1&-2&1\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$ tj.
$$\begin{aligned}2x_1-2x_2+x_3&=0\\-x_1-2x_2+x_3&=0\\x_1&=0\end{aligned}$$

$x_2=t$, $x_3=-2t$, $x_1=0$

$\vec{v}_2=\begin{bmatrix}0\\t\\-2t\end{bmatrix}$, $t\neq 0$ svojstveni vektor kome odgovara svojstvena vrijednost $\lambda_2=-1$

Za $\lambda_3=2$ završiti za vježbu (rj. $\vec{v}_3=\begin{bmatrix}3t\\-2t\\t\end{bmatrix}$, $t\neq 0$).

Nađi svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore matrica: a) $C=\begin{bmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\2&-1&0\end{bmatrix}$; b) $D=\begin{bmatrix}5&6&1\\6&5&1\\-1&1&0\end{bmatrix}$

Rješenje: a) $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=1$, $\lambda_3=2$. b) $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=-1$ i $\lambda_3=11$

Izračunati karakteristične vrijednosti i karakteristične vektore matrice $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -6 & -7 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Rj. Označimo sa $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -6 & -7 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Prema definiciji $A\vec{v} = \lambda \vec{v}$.

$\left(\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix},\ v_i \in R,\ \vec{v} \neq \vec{0}\right)$

$A\vec{v} - \lambda\vec{v} = \vec{0}$

$(A-\lambda I)\vec{v} = \vec{0}$ Ovo je homogeni sistem, ima netrivijalna rješenja akko je $\det(A-\lambda I) = \vec{0}$

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 & 0 \\ -6 & -7-\lambda & 0 \\ -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ -6 & -7-\lambda \end{vmatrix} \overset{Iv+IIv}{=\!=} (1-\lambda)\begin{vmatrix} -3-\lambda & -3-\lambda \\ -6 & -7-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)(-3-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -6 & -7-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-3-\lambda)(-7-\lambda+6) = (1-\lambda)(-3-\lambda)(-1-\lambda)$$

Karakteristične vrijednosti su $\lambda_1 = -3,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = 1$

Za $\lambda_1 = -3$ imamo:

$(A-\lambda I)\vec{v} = \vec{0}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \vec{v} \neq 0$

$$\begin{bmatrix} 6 & 4 & 0 \\ -6 & -4 & 0 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$6x_1 + 4x_2 = 0$ I

$-6x_1 - 4x_2 = 0$ II

$-x_1 - x_2 + 4x_3 = 0$ III

$6x_1 = -4x_2 \Rightarrow x_1 = -\frac{4}{6}x_2$, $x_1 = -\frac{2}{3}x_2$

III $\Rightarrow +\frac{2}{3}x_2 - x_2 + 4x_3 = 0$

$4x_3 = \frac{1}{3}x_2 \Rightarrow x_3 = \frac{1}{12}x_2$

Svojstveni vektor $\vec{v_1} = (-\frac{2}{3}t, t, \frac{1}{12}t)$, $t \neq 0, t \in R$ koji odgovara svojs. vr. λ_1

Za $\lambda_2 = -1$ imamo:

$(A-\lambda I)\vec{v} = \vec{0}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \vec{v} \neq 0$

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -6 & -6 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$4x_1 + 4x_2 = 0$ (1)

$-6x_1 - 6x_2 = 0$ (2)

$-x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$ (3)

$x_1 = -x_2$

(3) $\Rightarrow x_2 - x_2 + 2x_3 = 0$

$x_3 = 0$ Svojstveni vektor $\vec{v_2} = (-t, t, 0)$ koji odgovara svojstvenoj vrijednosti $\lambda_2 = -1$. ($t \neq 0, t \in R$)

Za $\lambda_3 = 1$ imamo:

$(A-\lambda I)\vec{v} = \vec{0}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \vec{v} \neq 0$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -6 & -8 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$2x_1 + 4x_2 = 0$ (a)

$-6x_1 - 8x_2 = 0$ (b)

$-x_1 - x_2 = 0$ (c)

(c) $\Rightarrow x_1 = -x_2$

Jedino rješenje ovog sistema je $x_1 = x_2 = 0$

$x_3 \in R$ je proizvoljan broj.

Svojstveni vektor $\vec{v_3} = (0, 0, t)$, $t \in R$, $t \neq 0$ koji odgovara svojstvenoj vrijednosti $\lambda_3 = 1$.

Izračunati karakteristične vrijednosti i karakteristične vektore matrice $\begin{bmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -1 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$.

Rj. Označimo sa $B = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -1 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$. Prema definiciji $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$, $\vec{v} \neq 0$

$(A-\lambda I)\vec{v} = \vec{0}$ homogeni sistem

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 & -1 \\ -1 & 6-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} \overset{Iv+IIv}{=\!=} \begin{vmatrix} 4-\lambda & 4-\lambda & 0 \\ -1 & 6-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} \overset{IIk-Ik}{=\!=} \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 7-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 5-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (4-\lambda)\begin{vmatrix} 7-\lambda & 1 \\ 1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(35-12\lambda+\lambda^2-1) = (4-\lambda)(\lambda^2-12\lambda+34)$$

$D = 144 - 136$

$D = 8$

$\lambda_{1,2} = \frac{12 \pm 2\sqrt{2}}{2}$

$\det(A-\lambda I) = (4-\lambda)(\lambda-6+\sqrt{2})(\lambda-6-\sqrt{2})$

Karakteristične vrijednosti su $\lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = 6-\sqrt{2},\ \lambda_3 = 6+\sqrt{2}$.

Za $\lambda_1 = 4$ imamo

$(A-\lambda I)\vec{v} = \vec{0}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ $x_i \in R$, $\vec{v} \neq \vec{0}$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x_1 - 2x_2 - x_3 = 0$ (I)

$-x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$ (II)

$x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$ (III)

(II) + (III): $4x_2 + 2x_3 = 0$ /:2

$x_3 = -2x_2$

(I) $\Rightarrow x_1 = 2x_2 + (-2x_2) = 0$

Karakteristični vektor $\vec{v_1} = (0, t, -2t)$, $t \neq 0$, $t \in R$ koji odgovara $\lambda_1 = 4$

Za $\lambda_2 = 6-\sqrt{2}$ imamo

$(A-\lambda I)\vec{v} = \vec{0}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \vec{v} \neq 0$

$$\begin{bmatrix} -1+\sqrt{2} & -2 & -1 \\ -1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & 2 & -1+\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$(\sqrt{2}-1)x_1 - 2x_2 - x_3 = 0$ (1)

$-x_1 + \sqrt{2}x_2 + x_3 = 0$ (2)

$x_1 + 2x_2 + (\sqrt{2}-1)x_3 = 0$ (3)

(2)+(3): $(2+\sqrt{2})x_2 + \sqrt{2}x_3 = 0$

$x_3 = (-\frac{2}{\sqrt{2}} - 1)x_2$

$x_3 = (-\sqrt{2}-1)x_2 = (-1)(\sqrt{2}+1)x_2$

(1) $\Rightarrow (\sqrt{2}-1)x_1 = 2x_2 + x_3 = 2x_2 - (\sqrt{2}+1)x_2 = (1-\sqrt{2})x_2 = -(\sqrt{2}-1)x_2$

Karakteristični vektor $\vec{v_2} = (-t, t, (-1)(\sqrt{2}+1)t)$ koji odgova kar. vr. $\lambda_2 = 6-\sqrt{2}$

Za $\lambda_3 = 6+\sqrt{2}$ imamo

$(A-\lambda I)\vec{v} = \vec{0}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \vec{v} \neq 0$

$$\begin{bmatrix} -1-\sqrt{2} & -2 & -1 \\ -1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 1 & 2 & -1-\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$(-1)(1+\sqrt{2})x_1 - 2x_2 - x_3 = 0$ (I)

$-x_1 - \sqrt{2}x_2 + x_3 = 0$ (II)

$x_1 + 2x_2 - (1+\sqrt{2})x_3 = 0$ (III)

(I)+(II): $-(2+\sqrt{2})x_1 - (2+\sqrt{2})x_2 = 0$

$x_1 = -x_2$

(III) $\Rightarrow x_2 - (1+\sqrt{2})x_3 = 0$

$x_3 = \frac{x_2}{1+\sqrt{2}} \cdot \frac{(1-\sqrt{2})}{(1-\sqrt{2})} = (-1)(1-\sqrt{2})x_2$

Karakteristični vektor $\vec{v_3} = (-t, t, (-1)(1-\sqrt{2})t)$ koji odgovara kar. vr. $\lambda_3 = 6+\sqrt{2}$.